ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	**17 / 01 / 2026**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α': ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1

Α. Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της (σελ. 42 σχολ).

Β. $(α – β)^2 = (α – β)(α – β) = α^2 – αβ – βα + β^2 = α^2 – 2αβ + β^2$ (σελ. 43 σχολ).

Γ. i. Σωστό **ii.** Λάθος **iii.** Λάθος **iv.** Λάθος **v.** Λάθος

ΘΕΜΑ 2

Α. i. Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα (σελ. 189 σχολ.)

ii. Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μία κορυφή και είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς (σελ. 187 σχολ.).

Β. i. Λάθος **ii.** Σωστό **iii.** Σωστό **iv.** Σωστό **v.** Σωστό

Γ. Δύο τρίγωνα μπορεί να έχουν όλες τις γωνίες ίσες αλλά διαφορετικά μήκη πλευρών, δηλαδή να είναι όμοια και όχι ίσα.

ΜΕΡΟΣ Β': ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Α. i. $A = (x + y)^2 – 4xy = x^2 + 2xy + y^2 – 4xy = x^2 – 2xy + y^2 = (x – y)^2$

ii. Για $x = 100$ και $y = 101$ έχουμε $A = (x – y)^2 = (100 – 101)^2 = (–1)^2 = 1$

Β. i. $5xy – 10x = 5x(y – 2)$

ii. $(2x – 1)^2 – 2x + 1 = (2x – 1)^2 – (2x – 1) = (2x – 1)[(2x – 1) – 1] = (2x – 1)(2x – 2) =$

$= 2(2x – 1)(x – 1)$

iii. $4x^2 - 16 = (2x)^2 - 4^2 = (2x-4)(2x+4) = 2\cdot 2(x-2)(x+2) = 4(x-2)(x+2)$

iv. $x^3 - 7x^2 - 3x + 21 = x^2(x-7) - 3(x-7) = (x-7)(x^2-3)$

v. $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2\cdot 2x + 1^2 = (2x+1)^2$

ΘΕΜΑ 2

Α. i. $(3x-2)^2 = (3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4$

ii. $\left(x^2-1\right)^3 = \left[\left(x\right)^2\right]^3 - 3\left(x^2\right)^2 + 3x^2 - 1 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

iii. $\left(\sqrt{x}-6\right)^2 = (\sqrt{x})^2 - 2\cdot\sqrt{x}\cdot 6 + 6^2 = x - 12\sqrt{x} + 36$

iv. $\left(5y-\frac{2}{3}\right)\left(5y+\frac{2}{3}\right) = (5y)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 25y^2 - \frac{2^2}{3^2} = 25y^2 - \frac{4}{9}$

v. $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 - 3\left(\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^3 = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{3} + 9\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$

$= 11\sqrt{2} - 9\sqrt{3}$.

Β. i. $\left(2x+\frac{2}{x}\right)^2 - \left(2x-\frac{2}{x}\right)^2 = \left[\left(2x+\frac{2}{x}\right)+\left(2x-\frac{2}{x}\right)\right]\left[\left(2x+\frac{2}{x}\right)-\left(2x-\frac{2}{x}\right)\right] =$

$\left(2x+\frac{2}{x}+2x-\frac{2}{x}\right)\left(2x+\frac{2}{x}-2x+\frac{2}{x}\right) = 4x\left(2\cdot\frac{2}{x}\right) = 4x\cdot\frac{4}{x} = 16$

ii. $K = \left(8104+\frac{1}{2026}\right)^2 - \left(8104-\frac{1}{2026}\right)^2 =$

$\left[\left(8104+\frac{1}{2026}\right)+\left(8104-\frac{1}{2026}\right)\right]\left[\left(8104+\frac{1}{2026}\right)-\left(8104-\frac{1}{2026}\right)\right] =$

$\left(8104+\frac{1}{2026}+8104-\frac{1}{2026}\right)\left(8104+\frac{1}{2026}-8104+\frac{1}{2026}\right) = (2\cdot 8104)\left(2\cdot\frac{1}{2026}\right) = 16$.

Εναλλακτικά στην $\left(2x+\frac{2}{x}\right)^2 - \left(2x-\frac{2}{x}\right)^2$ που διαπιστώσαμε ότι ισούται με 16

θέτουμε την τιμή $x = 4052$ και είναι :

$$\left(2\cdot4052+\frac{2}{4052}\right)^2-\left(2\cdot4052-\frac{2}{4052}\right)^2=\left(8104+\frac{1}{2026}\right)^2-\left(8104-\frac{1}{2026}\right)=16$$

ΘΕΜΑ 3

i. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ που έχουν:

(α) ΑΒ = ΑΓ (αφού τρίγωνο ΑΒΓ ισοσκελές)

(β) $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}$ (ως προσκείμενες στην βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ)

(γ) ΔΒ = ΓΕ (υπόθεση)

άρα από κριτήριο Π–Γ–Π τα τρίγωνα ίσα.

ii. Από προηγούμενο ερώτημα και την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΕΓ προκύπτει ότι και οι αντίστοιχες πλευρές τους είναι ίσες, δηλαδή ΑΔ = ΑΕ.

iii. Αφού από προηγούμενο ερώτημα είναι ΑΔ = ΑΕ, τότε το τρίγωνο ΑΔΕ ισοσκελές.

Συνεπώς η ΑΜ εκτός από διχοτόμος του τριγώνου ΑΔΕ θα είναι και ύψος και διάμεσος. Δηλαδή $\mathrm{AM}\perp\Delta\mathrm{E}$ και ΔΜ=ΜΕ.

Άρα θα είναι και $\mathrm{AM}\perp\mathrm{B}\Gamma$, ενώ επιπλέον θα ισχύει ΒΜ = ΒΔ + ΔΜ = ΕΓ + ΜΕ = ΜΓ.

Συνεπώς η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.